Задачи для студенческой олимпиады по физике

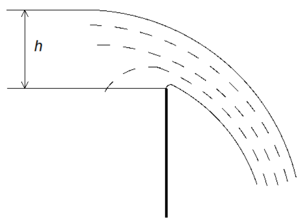

Рис. 1: Перетекание жидкости через водослив.

Задача 1. *Струйное течение жидкости.* Жидкость вытекает из сосуда через широкий водослив под напором h, который равен установившейся высоте уровня жидкости над водосливом (см. Рис. 1). Сосуд, в котором находится жидкость, обладает достаточным объемом, поэтому течение можно считать установившимся и стационарным вдоль всей ширины кромки стенки водослива. Жидкость характеризуется плотностью ρ, при этом масштабы задачи позволяют считать течение струйным, когда основное значение имеют свойства инерции и весомости жидкости. Водослив достаточно широкий, что можно пренебречь краевыми эффектами в расчете расхода жидкости. Определить удельный расход Q жидкости через водослив (массу жидкости, вытекающей через водослив, в единицу времени на единицу ширины кромки водослива) как функцию от напора h, ускорения свободного падения g и плотности жидкости ρ, с точностью до постоянной величины. Определить, во сколько раз увеличится расход жидкости через водослив, если напор h увеличить в 4 раза **(2 балла)**.

Задача 2. *Истечение в вакуум.* Найти скорость стационарного установившегося истечения идеального газа в вакуум. Течение газа считать изоэнтропическим и одномерным. Газ характеризуется показателем адиабаты γ и (изоэнтропической) скоростью звука a_S. Определить, является ли скорость истечения газа в вакуум сверхзвуковой, по отношению к невозмущенному газу, и вычислить соответствующее эффективное число Маха. Определить, при каком допустимом значении γ полученное число Маха принимает минимальное значение, и указать, существуют ли среды или процессы, для которых достижимы подобные значения γ **(3 балла)**.

Задача 3. *Масса фотона и масса фотонов.* Фотон является безмассовой частицей. Определить массу физической системы, состоящей из двух свободных фотонов с частотами ω_1 и ω_2 и волновыми векторами $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$. Результат выразить через частоты ω_1 и ω_2 и угол θ между волновыми векторами $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$. Определить, при каких значениях угла θ масса системы двух фотонов достигает максимального и минимального значений. Получить результаты в случае фотонов с одинаковой частотой **(5 баллов)**.

Задача 4. *Экранированный кулоновский потенциал.* Найти потенциал пробного точечного заряда e в макроскопически однородной изотропной квазинейтральной ионизированной среде, состоящей из заряженных частиц с зарядами e и $-e$. Ионизированная среда предполагается равновесной, классической (невырожденной) и идеальной (для масштаба тепловой энергии $k_{\mathrm{B}}T$ и масштаба потенциальной энергии U_{int} межчастичного взаимодействия предполагается условие $k_{\mathrm{B}}T \gg U_{int}$) **(5 баллов)**.

Задача 5. *Слияние черных дыр.* Оценить максимальную энергию, которая может быть выделена при слиянии двух шварцшильдовских черных дыр с массами M_1 и M_2. Исходить из представлений о термодинамике черных дыр, согласно которым площади их горизонтов не могут убывать (данное представление известно, как теорема Хокинга). Определить максимальную долю массы, которая будет излучена при слиянии двух шварцшильдовских черных дыр одинаковой массы **(2 балла)**.

Примечание. Гравитационный радиус r_g и площадь горизонта A шварцшильдовской черной дыры можно определить по формулам $r_g = 2GM/c^2$ и $A = 4\pi r_g^2$, где M — масса черной дыры, G — гравитационная постоянная, c — скорость света. Если использовать данные выражения без вывода, то задача оценивается в **2 балла**; если вывести эти выражения из метрики Шварцшильда, то будет добавлено еще **8 баллов**.

Задача 6. *Сверхсветовое распространение сигнала и причинность.* Экспериментально установлено, что скорость света c одинакова во всех инерциальных системах отсчета. Поэтому для сигнала, распространяющегося со скоростью света c от движущегося источника, будет измерена такая же скорость c, как и в случае покоящегося источника. Положение об инвариантности скорости света c относительно скорости инерциальной системы отчета и положение об однородности и изотропности пространства-времени в инерциальных системах отчета лежат в основе специальной теории относительности.

Предположим, что существуют некоторые способы передачи сигнала, для которых скорость передачи сигнала u превышает скорость света c. В начальный момент времени наблюдатель A испустил сверхсветовой сигнал в сторону наблюдателя B. Наблюдатель B, сразу после получения сигнала, отправляет ответный сверхсветовой сигнал в сторону наблюдателя A. Определить, через какой промежуток времени будет получен ответный сигнал наблюдателем A, если оба наблюдателя покоятся и находятся на расстоянии L друг от друга. Определить, через какой промежуток времени будет получен ответный сигнал наблюдателем A, если наблюдатель B удаляется от A с досветовой скоростью $v < c$ и в момент получения сигнала находился на расстоянии L от A, в системе отсчета наблюдателя A. Показать, что в таком случае существуют значения досветовой скорости v наблюдателя B, для которых ответ можно получить до отправления сигнала. Из полученного результата сделать вывод, какие ограничения на скорость распространения сигнала задают положения об инвариантности скорости света c и об однородности и изотропности пространства-времени в инерциальных системах отчета **(10 баллов)**.

Задача 7. *Геометрическая оптика неоднородной среды.* Электромагнитная волна распространяется в неоднородной слоистой среде, в которой показатель преломления $n(x)$ зависит от декартовой координаты x, которую будем называть высотой. Условия задачи допускают использование математического аппарата геометрической оптики для анализа распространения волны в данных условиях. Получить выражение высоты x_r отражения луча и условие прохождения луча через среду в случае, когда луч изначально вошел в неоднородную среду под углом α_0 из среды с показателем преломления $n_0 = 1$. Применить полученный математический аппарат к следующему интересному случаю: показатель преломления определяется соотношением $n(x) = \sqrt{\varepsilon(x)}$, где $\varepsilon(x)$ — диэлектрическая проницаемость среды, для которой задано выражение

$$\varepsilon(x) = 1 - \frac{\omega_p^2(x)}{\omega^2},$$

где ω_p — плазменная частота, ω — частота электромагнитной волны; для плазменной частоты определена зависимость от высоты x в виде параболического слоя:

$$\omega_p^2(x) = \omega_0^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{x - x_m}{w}\right)^2\right], \qquad |x| \leqslant w,$$

где x_m — высота, на которой достигается максимум плазменной частоты ω_0, w — полуширина параболического слоя; в области $|x| > w$ можно положить $\omega_p(x) = 0$. Определить зависимость высоты отражения луча x_r от частоты ω электромагнитной волны и начального угла падения α_0 для данного случая **(10 баллов)**.