2.6 Графическая обработка результатов.

Исследование зависимостей между различными варьируемыми переменными, как правило, является основным методом экспериментальных исследований. Поэтому, по возможности, стремитесь проводить такие исследования при выполнении экспериментальных заданий.

Приведем основные правила планирования и реализации экспериментального исследования функциональных зависимостей.

1. **Выбирайте для исследования тот вид зависимости, который наиболее просто и надежно описан теоретически *(если, конечно, в условии четко не указано, какие зависимости необходимо получить).***
2. **Стремитесь провести измерения в максимальном диапазоне варьируемых параметров - полностью используйте возможности вашей экспериментальной установки *(если, конечно, в условии четко не указано, в каком диапазоне необходимо провести измерения).* Кстати, увеличение диапазона изменения варьируемых величин приводит к уменьшению погрешностей рассчитываемых параметров.**
3. **Число измерений должно быть достаточно для построения зависимости, даже для построения линейной зависимости необходимо получить 8-10 экспериментальных точек *(если, конечно, в условии четко не указано, с каким шагом проводить измерения).* Чем больше погрешность отдельного измерения, тем больше экспериментальных точек должно быть получено.**
4. **Если ваша зависимость имеет какие-либо особенности (максимумы, минимумы, перегибы, точки разрыва и т.д.), в районе этих особенностей «густота» экспериментальных точек должна быть больше.**

Наиболее просто обрабатываются линейные зависимости - даже «на глаз» легко отличить прямую от «кривой», а попробуйте отличить участок параболы от какой-нибудь лемнискаты Бернулли. Поэтому даже в том случае, если ваша зависимость нелинейная, постарайтесь соответствующим преобразованием переменных привести ее к линейному виду.

Пусть в рамках своих теоретических построений вы пришли к выводу, что некоторые физические величины связаны функциональной зависимостью $y = F(x)$, причем эта функция содержит набор постоянных параметров $p, q\ldots$, либо подлежащих определению, либо просто неизвестных (следовательно, вид зависимости следует записать в более общем виде $y = F(x, p, q\ldots)$. Практически всегда можно найти такие преобразования к новым переменным[2] $Y(y)$, $X(x)$, так что зависимость между ними линейна. *Подчеркнем, что эти преобразования не должны содержать неизвестных параметров.* Возможные варианты таких преобразований мы будем встречать при рассмотрении

---

[2] В более общем случае каждая из новых переменных Y, X может зависеть от обеих исходных $Y(x, y)$, $X(x, y)$ - этот случай принципиально не отличается от рассматриваемого здесь.

конкретных задач. Краткая сводка наиболее популярных преобразований приведена в Приложении 3.

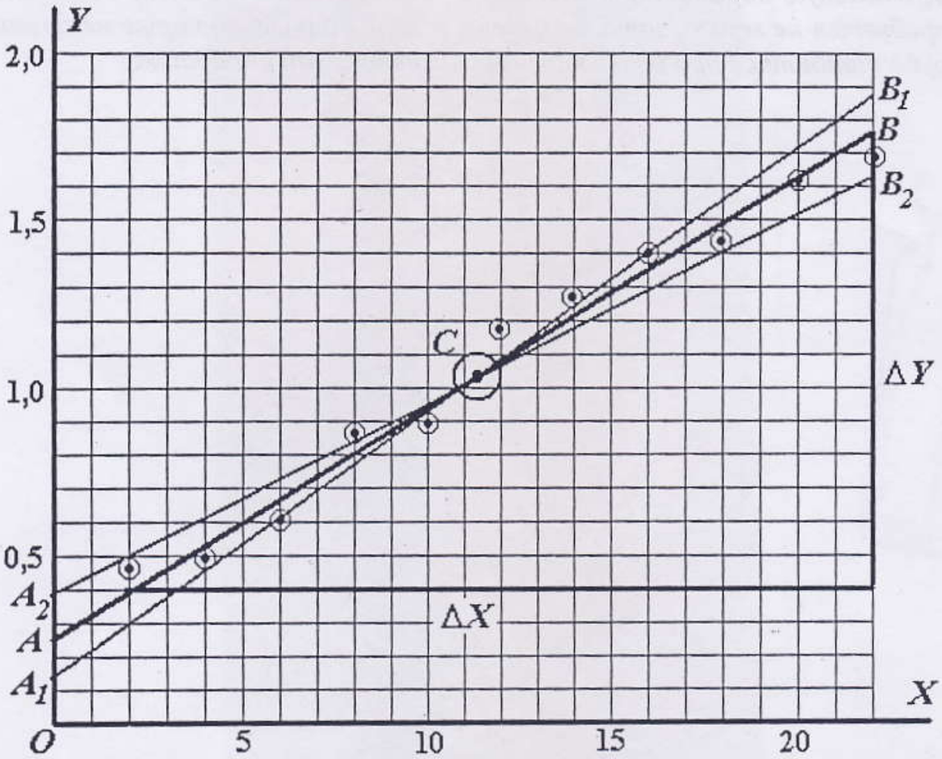
В некоторых случаях требуется определить не все параметры, а только некоторые из них (возможно, что некоторые из них и определить то невозможно). В такой ситуации следует руководствоваться известными правилами экспериментатора:

1. Чем проще модель, тем лучше.

2. Измеряй как можно меньше величин

3. Не можешь измерить, то хотя бы не изменяй (а вдруг сократится).

Итак, будем считать, что преобразования к линейному виду найдены, проведены измерения в нужном количестве, в нужном диапазоне, получены данные (x_i, y_i), $i = 1,2,\dots N$, и на их основании подсчитаны величины (X_i, Y_i), для которых ваша теория предсказывает линейную зависимость[3] $Y = aX + b$. Следующий шаг - построение графика (в полном соответствии с рассмотренными ранее правилами: выбор масштаба, разметка осей, нанесение экспериментальных точек ...). Ниже, на рисунке показано такое построение для некоторой «придуманной» зависимости. Воспользуемся этим рисунком, чтобы продемонстрировать порядок обработки результатов, целью которого является оценка параметров зависимости и их погрешностей.



Затем очень быстро можно провести определение параметров зависимости «на глаз». Для этого следует провести прямую, которая «ближе всего» лежит к экспериментальным точкам (на нашем рисунке это AB). Чтобы ее построить, можно воспользоваться следующими рекомендациями: выберите «центр масс» имеющихся экспериментальных точек (приближенно ее координаты равны средним между крайними значениями соответствующих координат), на

[3] Конечно, после проведенных преобразований коэффициенты полученной зависимости a, b должны выражаться через параметры исходной зависимости $p, q\dots$

рисунке это точка C; через эту точку проведите прямую так, чтобы по разные стороны от нее лежало примерно одинаковое число экспериментальных точек. Сразу же определите приближенные значения параметров зависимости:

- величина b есть величина отрезка AO (на рисунке $b \approx 0{,}25$);
- коэффициент a равен отношению $a \approx \dfrac{\Delta Y}{\Delta X}$, причем величину ΔX можно выбрать произвольно (но не слишком малой), так чтобы можно было вычислить отношение «в уме» (на рисунке $\Delta X = 20$, $\Delta Y \approx 1{,}35$, поэтому $a \approx \dfrac{\Delta Y}{\Delta X} \approx 0{,}07$).

Для оценки погрешностей параметров зависимости нужно провести две «граничные» прямые (примерные): обе проходят через «центр масс», а область между прямыми должна захватывать большинство экспериментальных точек (ближайшие к центру точки могут выходить за выделяемую область). На нашем рисунке это прямые A_1B_1 и A_2B_2. Так же как и для основной, для этих прямых можно определить параметры, которые и будут являться нижними и верхними границами величин a, b.

Настоятельно рекомендуем вам всегда проводить такую предварительную обработку (хотя бы без оценки погрешностей) - времени на это требуется не много, зато вы будете иметь данные, которые не позволят вам грубо ошибиться при более точной аналитической обработке.

Приложение 1.

Приборные погрешности некоторых часто используемых приборов[9].

Приборы и меры	**Значения меры, диапазон измерения**	**Предельная приборная погрешность**
Линейки -металлические - деревянные - пластмассовые	 150, 300, 500 мм 1000 мм 400, 500, 750 мм 200, 250, 300, 400 мм	 0,1 мм 0,2 мм 0,5 мм 1 мм
Мензурки 2-го класса	100, 200 $см^3$	5 $см^3$
Штангенциркули с ценой деления 0,1; 0,05 мм	0-155, 0- 250, 0-350 мм	0,1; 0,05 мм в соответствии с ценой деления нониуса
Весы лабораторные	5-100, 10-200 г	3 цены деления шкалы
Секундомеры механические	30-60 с	1,5 цены деления шкалы за один оборот секундной стрелки
Термометры стеклянные жидкостные	от -20 до 100 $°C$ от -35 до 100 $°C$	1 цена деления, если она равна 1; 2; 5 К; 2 цены деления, если она равна 0,2; 0,5 К

Если вам не известна предельная приборная погрешность или класс точности прибора, то в качестве оценки можно брать половину цены деления шкалы!

[9] По книге Г.С. Кембровский «Приближенные вычисления и методы обработки результатов измерений в физике»; Мн. «Университетское», 1990.

Приложение 3. Приведение зависимости к линейному виду.

№	Исходная зависимость	Неизвестные параметры	Возможные преобразования и вид полученной зависимости	Комментарии
1	$y = ax^m$	a	1.1 $\begin{cases} Y = y \\ X = x^m \end{cases}$ $Y = aX$ 1.2 $\begin{cases} Y = y^{\frac{1}{m}} \\ X = x \end{cases}$ $Y = a^{\frac{1}{m}} X$	Выбор возможного преобразования определяется удобством вычислений, например, в квадрат возвести проще, чем извлекать корень.
2	$y = ax^m + b$	a, b	2.1 $\begin{cases} Y = y \\ X = x^m \end{cases}$ $Y = aX + b$	Преобразование очевидное и единственно возможное при двух неизвестных параметрах
3	$y = af(x) + b$	a, b	3.1 $\begin{cases} Y = y \\ X = f(x) \end{cases}$ $Y = aX + b$	Преобразование является очевидным обобщением предыдущего. Здесь $f(x)$ - произвольная функция, не содержащая неизвестных параметров.
4	$y = ax^m$	a, m	4.1 $\begin{cases} Y = \ln y \\ X = \ln x \end{cases}$ $Y = mX + \ln a$	Это преобразование необходимо для экспериментального определения неизвестного показателя степени. Преобразованная зависимость является логарифмической. (Называется логарифмический масштаб, или «log-log» scale)
5	$y = ae^{bx}$	a, b	5.1 $\begin{cases} Y = \ln y \\ X = x \end{cases}$ $Y = bX + \ln a$	Это преобразование служит для определения показателя экспоненты. (Называется полулогарифмический масштаб, или «semi-log» scale)

Приводимая таблица, конечно, не исчерпывает всех видов возможных преобразований, в ней приведены наиболее часто встречающиеся зависимости.